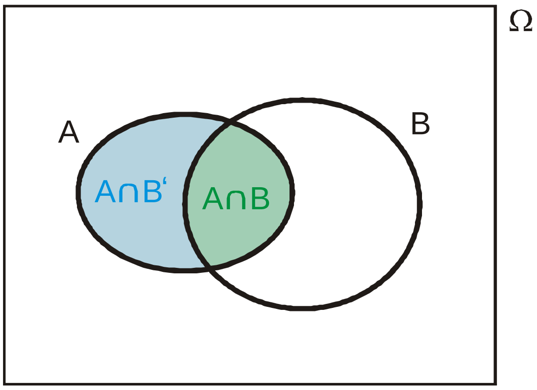
9.2.8 Nezávislé jevy II

Předpoklady: 9207

Jsou-li nezávislé jevy *A* a *B*, jsou nezávislé i jevy *A* a B'?
Pokud ano, musí platit $P(A\cap B')=P(A)\cdot P(B')$.



Z obrázku je vidět, že platí: $A\cap B'=A\cap(A\cap B)' \Rightarrow$

$$P(A\cap B')=P\left(A\cap(A\cap B)'\right)=P(A)-P(A\cap B).$$

Použijeme nezávislost jevů *A*, *B*: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\cdot P(B)=P(A)\left[1-P(B)\right]=P(A)\cdot P(B').$$

Jsou-li jevy *A*, *B* nezávislé, jsou nezávislé i dvojice jevů:
$A,\ B'$ $\quad A',\ B$ $\quad A',\ B'$

Př. 1: Na výrobku se vyskytují nezávisle na sobě tři druhy vad s pravděpodobnostmi: $P(A)=0{,}02$, $P(B)=0{,}05$, $P(C)=0{,}1$. Urči pravděpodobnost, že:
a) výrobek má vady *A*, *B*; b) výrobek má všechny tři vady *A*, *B*, *C*;
c) výrobek má vady *A*, *B* a nemá vadu *C*; d) výrobek je bez vady.

Všechny tři vady jsou nezávislé jevy $\Rightarrow$ můžeme používat vzorce pro násobení pravděpodobností.

a) výrobek má vady *A*, *B*

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}02\cdot 0{,}05=0{,}001$$

Tato pravděpodobnost neříká nic o tom, zda bude mít výrobek vadu *C* nebo ne.

b) výrobek má všechny tři vady *A*, *B*, *C*

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}02\cdot 0{,}05\cdot 0{,}1=0{,}0001$$

c) výrobek má vady *A*, *B* a nemá vadu *C*

Pravděpodobnost, že výrobek nemá vadu *C* = $P(C')=1-P(C)=1-0{,}1=0{,}9$.

$$P(A\cap B\cap C')=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C')=0{,}02\cdot 0{,}05\cdot 0{,}9=0{,}0009$$

d) výrobek je bez vady
Podobně jako v předchozím bodu u vady *C*:
$P(A')=1-P(A)=1-0,02=0,98$, $P(B')=1-P(B)=1-0,05=0,95$.
$P(A'\cap B'\cap C')=P(A')\cdot P(B')\cdot P(C')=0,98\cdot 0,95\cdot 0,9=0,8379 \doteq 0,84$
Výrobek bude bez vady s pravděpodobností 84%.

Pedagogická poznámka: V bodě c) mají žáci tendenci zapomínat na vadu *C* a psát pouze $P(\ )=P(A)\cdot P(B)$. Upozorňuji, že tento bod nemůže vyjít stejně jako bod a), kde jsme na vadu *C* vůbec nebrali ohled. Jde o typickou ukázku tendence starat se pouze o to, co chci.

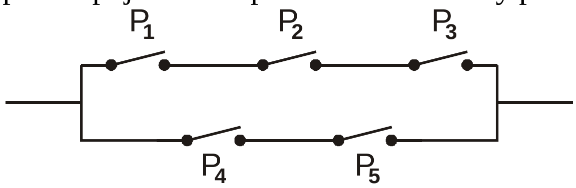
Př. 2: Obyčejná žárovka vydrží nepřetržitě svítit 1500 hodin s pravděpodobností 85%. Urči, s jakou pravděpodobností vydrží 1500 hodin svítit sériově zapojená dvojice těchto žárovek.

Pokud jsou žárovky zapojeny sériově, stačí, když přestane svítit jedna z nich, a zhasne i druhá $\Rightarrow$ hledáme pravděpodobnost, že svítí obě žárovky (první žárovka a zároveň druhá žárovka)
$P(Z_1)=P(Z_2)=0,85$.
Jde o dva nezávislé jevy $\Rightarrow$ $P(Z_1\cap Z_2)=P(Z_1)\cdot P(Z_2)=0,85\cdot 0,85=0,7225 \doteq 0,72=72\%$.
Dvě sériově zapojené žárovky budou svítit 1500 hodin s pravděpodobností 72%.

Př. 3: Obyčejná žárovka vydrží nepřetržitě svítit 1500 hodin s pravděpodobností 85%. Urči, s jakou pravděpodobností vydrží svítit alespoň jedna ze dvojice těchto žárovek, pokud jsou zapojeny paralelně. Příklad řeš dvěma způsoby:
a) pomocí sčítání pravděpodobností, b) pomocí opačných jevů.

Pokud jsou žárovky zapojeny paralelně, když zhasne jedna, zůstane druhá svítit $\Rightarrow$ stačí, pokud bude svítit alespoň jedna z nich $\Rightarrow$ hledáme sjednocení pravděpodobností
$P(Z_1\cup Z_2)$.
a) pomocí sčítání pravděpodobností
$P(Z_1\cup Z_2)=P(Z_1)+P(Z_2)-P(Z_1\cap Z_2)=0,85+0,85-0,85\cdot 0,85=0,9775 \doteq 0,98=98\%$
b) pomocí opačných jevů
Jev svítí alespoň jedna žárovka je opačný jev k jevu zhasnou obě žárovky.
Jev zhasne žárovka: $P(Z')=1-P(Z)=1-0,85=0,15$.
Zhasnou obě žárovky: $P(Z_1'\cap Z_2')=P(Z_1')\cdot P(Z_2')=0,15\cdot 0,15=0,0225$.
Svítí alespoň jedna žárovka:
$P(Z_1\cup Z_2)=1-P(Z_1'\cap Z_2')=1-0,0225=0,9775 \doteq 0,98=98\%$.
Alespoň jedna ze žárovek bude v případě, že jsou zapojeny paralelně, svítit s pravděpodobností 98%.

Př. 4: Na obrázku je zapojení pěti přepínačů. Každý z nich může být nezávisle na ostatních zapnutý nebo vypnutý se stejnou pravděpodobností (0,5). Urči pravděpodobnost, že přes zapojení bude procházet elektrický proud.



Pokud má proud procházet přes zapojení, musí procházet buď přes horní nebo přes dolní větev. V obou větvích platí, že proud prochází, pouze když budou všechny přepínače ve větvi v poloze zapnuto.
Pravděpodobnost, že proud prochází:

- přes horní větev $P(H)=P(P_1)\cdot P(P_2)\cdot P(P_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,
- přes dolní větev $P(D)=P(P_4)\cdot P(P_5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Pokud má proud procházet přes zapojení, musí procházet buď přes horní nebo přes dolní větev $\Rightarrow$ hledáme sjednocení jevů H a D:
$P(H\cup D)=P(H)+P(D)-P(H\cap D)$ (oba jevy mohou nastat současně $\Rightarrow$ musíme odečíst pravděpodobnost jejich průniku, abychom ji nezapočítali dvakrát),
jevy H a D jsou nezávislé: $P(H\cap D)=P(H)\cdot P(D)$.

$$P(H\cup D)=P(H)+P(D)-P(H)\cdot P(D)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{32}\doteq 0{,}34$$

Elektrický proud bude přes zapojení procházet s pravděpodobností 0,34.

Poznámka: Předchozí příklad je možné řešit (podobně jako v bodu b) příkladu 3) i bez sčítání pravděpodobností (které je obecně nebezpečné kvůli zapomínání průniků).
Proud přes zapojení nebude procházet, když neprochází ani přes jednu z větví:
Proud neteče: $P(H'\cap D')=P(H')\cdot P(D')=\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{32}$.
Proud teče: $1-P(H'\cap D')=1-\frac{21}{32}=\frac{11}{32}$.

Sériové (paralelní) zapojení žárovek (přepínačů) v předchozích příkladech můžeme brát jako ukázky dvou základních zapojení funkčních částí složitějšího zařízení.

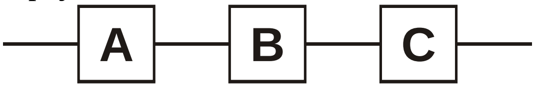
Sériové zapojení reprezentuje funkční **části, které musí pracovat** nezávisle na sobě **najednou**. Porucha libovolné takové části znamená poruchu celého zařízení.

Paralelní zapojení reprezentuje funkční **části, u kterých stačí, pokud funguje alespoň jedna**. Porucha libovolné takové části neznamená poruchu celého zařízení. Celé zařízení přestane pracovat pouze v případě, že se porouchají všechny paralelně zapojené části. Paralelně zapojené části tak navzájem zálohují svou funkci.

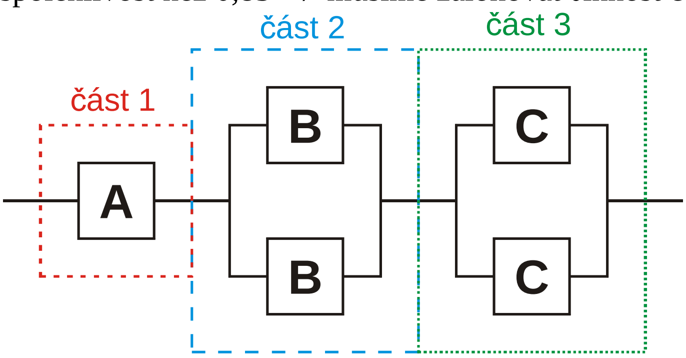
U běžných přístrojů jsou všechny funkční části zapojeny bez zálohování („sériově“), zálohování funkce se používá pouze u přístrojů, u kterých je požadována vysoká spolehlivost (disky a zdroje důležitých serverů, ochranné systémy v jaderných elektrárnách, …).

Př. 5: Přístroj je složený ze tří nezávislých funkčních celků, u každého z nich je uvedena pravděpodobnost nepřetržité funkčnosti po celou dobu životnosti přístroje a cena v tisících Kč. Navrhni zálohování funkčních celků tak, aby přístroj fungoval bez poruchy po celou dobu životnosti alespoň s pravděpodobností 0,85 a jeho cena byla co nejnižší. Celek *A*: pravděpodobnost 0,9, cena 10, celek *B*: pravděpodobnost 0,8, cena 5, celek *C*: pravděpodobnost 0,75, cena 1.

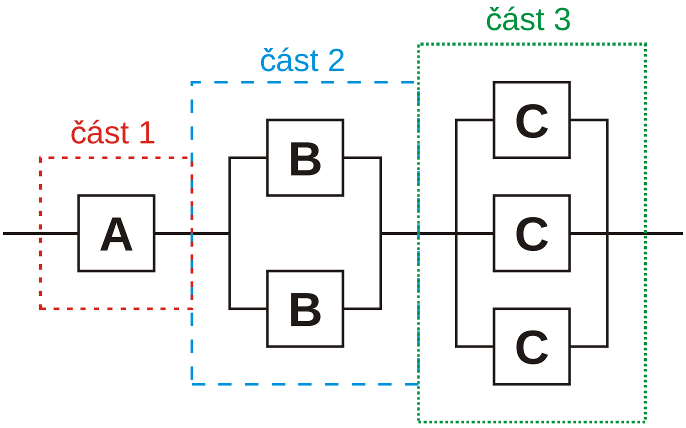
Analogicky se žárovkovými obvody si můžeme představit zapojení přístroje jako sériové zapojení celků *A*, *B*, *C*.



Přístroj bude funkční, pokud budou pracovat všechny tři celky:
$P(P) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,75 = 0,54 \Rightarrow$ musíme činnost některých celků zálohovat.
Zkusíme vytvořit z jednotlivých celků části, které budou zajišťovat dostatečnou spolehlivost jednotlivých celků, z předchozího výpočtu je zřejmé, že každá taková část musí mít větší spolehlivost než 0,85 $\Rightarrow$ musíme zálohovat činnost celků *B* a *C*.



Pravděpodobnost funkčnosti části 2:
Část 2 funguje, když funguje alespoň jeden ze dvou celků *B* $\Rightarrow$ nefunguje, když nefunguje ani jeden $\Rightarrow$ $P(2') = P(B') \cdot P(B') = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.
$P(2) = 1 - P(2') = 1 - 0,04 = 0,96$
Pravděpodobnost funkčnosti části 3:
Část 3 funguje, když funguje alespoň jeden ze dvou celků *C* $\Rightarrow$ nefunguje, když nefunguje ani jeden $\Rightarrow$ $P(3') = P(C') \cdot P(C') = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$.
$P(3) = 1 - P(3') = 1 - 0,0625 = 0,9375$
Pravděpodobnost funkčnosti celého přístroje:
$P(P) = P(1 \cap 2 \cap 3) = P(A) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0,9 \cdot 0,96 \cdot 0,9375 = 0,81$.
Pravděpodobnost, že se přístroj neporouchá, se značně zvětšila, ale zatím nedosahuje požadované hodnoty $\Rightarrow$ musíme přidat ještě další zálohovací celek.
1. nápad – zazálohujeme celek *A* v části 1 (má nejmenší spolehlivost), ale je zdaleka nejdražší $\Rightarrow$ zkusíme zvýšit spolehlivost části 3, přidáním dalšího bloku *C*.



Pravděpodobnost funkčnosti části 3:
Část 3 funguje, když funguje alespoň jeden ze tří celků C $\Rightarrow$ nefunguje, když nefunguje ani jeden $\Rightarrow$ $P(3') = P(C')\cdot P(C')\cdot P(C') = 0,25\cdot 0,25\cdot 0,25 = 0,015625$.

$P(3) = 1 - P(3') = 1 - 0,0625 = 0,984375$

Pravděpodobnost funkčnosti celého přístroje:
$P(P) = P(1\cap 2\cap 3) = P(A)\cdot P(2)\cdot P(3) = 0,9\cdot 0,96\cdot 0,984375 = 0,8505$.

$\Rightarrow$ Podařilo se dosáhnout požadované spolehlivosti.
Cena přístroje: $1\cdot 10 + 2\cdot 5 + 3\cdot 1 = 23$ tisíc Kč.

Př. 6: Petáková:
strana 172/cvičení 33
strana 172/cvičení 35 c)
strana 172/cvičení 37

Shrnutí: Při výpočtech spolehlivosti se vyplatí přecházet mezi pravděpodobností jevů a jevů k nim opačných.